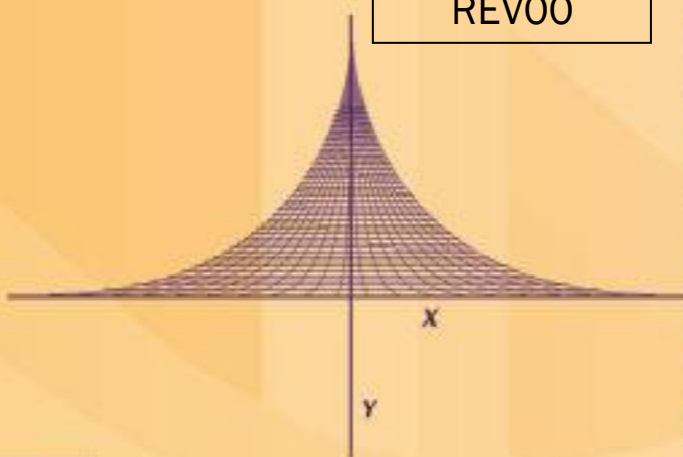




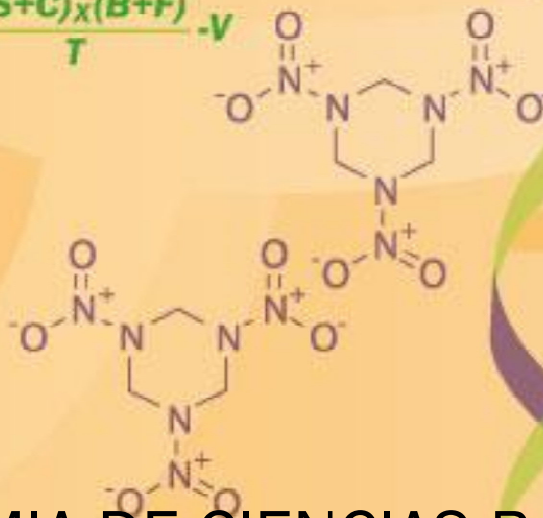
Subsistema de  
**Universidades  
Politécnicas**

# **Manual de Asignatura**

ALL-CV  
REV00



$$i = \frac{(S+C)x(B+F)}{T} - y$$



ACADEMIA DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA LINEAL



## Directorio

Lic. Emilio Chuayffet Chemor

Secretario de Educación

Dr. Fernando Serrano Migallón

Subsecretario de Educación Superior

Mtro. Héctor Arreola Soria

Coordinador General de Universidades Tecnológicas y Politécnicas

Dr. Gustavo Flores Fernández

Coordinador de Universidades Politécnicas.



## PÁGINA LEGAL

### Participantes

Adela Becerra Chávez – Universidad Politécnica de Querétaro

Baruch Campos López – Universidad Politécnica de Huatusco

Ismael Osuna Galán – Universidad Politécnica de Chiapas

Primera Edición: 2010.

DR © 2013 Coordinación de Universidades Politécnicas.

Número de registro: \_\_\_\_\_

México, D.F.

ISBN: \_\_\_\_\_



## ÍNDICE

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| Introducción.....               | 4  |
| Ficha técnica.....              | 6  |
| Programa de Estudio.....        | 9  |
| Instrumentos de evaluación..... | 10 |
| Glosario.....                   | 20 |
| Bibliografía.....               | 28 |

## INTRODUCCIÓN


El presente manual es una guía para la asignatura de Álgebra Lineal, la cual se encuentra dentro del grupo de asignaturas que conforman las Ciencias básicas en la formación a nivel superior.

Se comenzará por mencionar la enorme utilidad y aplicabilidad que tiene el Álgebra Lineal, que provee la aritmética básica para tratar problemas en los que interviene más de una variable. Está en los fundamentos de la Matemática contemporánea, y en el corazón de muchas de sus aplicaciones de tecnología.

Algunos de los problemas en cuya solución el Álgebra Lineal desempeña un papel relevante son:

- Analizar cómo se distribuyen los esfuerzos en cualquier estructura sometida a cargas (la estructura reticulada de un puente, el fuselaje de un avión, etcétera).
- Desplegar un gráfico sobre la pantalla de una computadora.
- Describir cómo depende el costo de una serie de productos del costo de cada uno de los insumos necesarios para fabricarlos.
- Describir los movimientos del brazo de un robot para controlarlo y ponerlo a realizar alguna tarea.
- Trabaja dentro de muchos algoritmos de compresión de la información que son imprescindibles para hacer posibles las comunicaciones modernas (por ejemplo, se despliega ante nuestros ojos cada vez que miramos un archivo .jpg).
- Describir el esquema de conexiones en cualquier red de cualquier naturaleza.
- Interviene en los procesos de optimización necesarios para una gestión eficiente.

Por lo anterior, el Álgebra Lineal es una herramienta poderosa, provee un antecedente matemático y constituye un pre-requisito para materias relacionadas con la independencia



lineal en soluciones de ecuaciones diferenciales, los diferentes métodos analíticos y gráficos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, las transformaciones lineales para su aplicación en diversas áreas.

El objetivo de la asignatura es “que el alumno desarrolle la capacidad de analizar y resolver problemas de aplicación relacionados con el álgebra matricial, soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, transformaciones lineales, valores y vectores propios.”

Esta asignatura contribuye con sus conocimientos y habilidades a varias de las materias posteriores tales como: Cálculo Vectorial, Estática, Fundamentos de Física, Ecuaciones Diferenciales, Variable Compleja, análisis de circuitos eléctricos, modelado y simulación de sistemas, investigación de operaciones, control, robótica, ente otras.

|                 |   |
|-----------------|---|
| Nombre:         | Álgebra Lineal  |
| Clave:          | ALL-CV  |
| Justificación:  | Esta asignatura es una herramienta fundamental y base para asignaturas posteriores en la formación de un estudiante universitario, que le permitirán desarrollar competencias para lograr el perfil de egreso en cualquier programa educativo.  |
| Objetivo:       | El alumno será capaz de analizar y resolver problemas relacionados con el álgebra matricial, sistemas de ecuaciones lineales aplicadas a la ingeniería, espacios vectoriales, transformaciones lineales, valores y vectores.  |
| Pre requisitos: | <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Conocimientos básicos del conjunto de los números reales y complejos, así como sus operaciones básicas (suma, resta multiplicación y división)</li> <li>■ Algebra elemental</li> <li>■ Conocimientos previos de Geometría Analítica en el plano y el espacio.</li> </ul> |

#### Capacidades asociadas

1. Comprender los conceptos básicos de la matemática universitaria
2. Utilizar el lenguaje de la matemática para expresarse correctamente
3. Formular problemas en lenguaje matemático para facilitar su análisis y solución
4. Utilizar modelos matemáticos para la descripción de situaciones reales
5. Utilizar las herramientas computacionales de cálculo numérico y simbólico en el planteamiento y resolución de problemas
6. Aplicar el razonamiento lógico deductivo para la solución de problemas
7. Aplicar principios, leyes y teorías generales para encontrar soluciones a problemas particulares.

|  | UNIDADES DE APRENDIZAJE         | TEORIA     |               | PRÁCTICA   |               |
|--|---------------------------------|------------|---------------|------------|---------------|
|  |                                 | presencial | No presencial | presencial | No presencial |
| Estimación de tiempo (horas) necesario para el aprendizaje al alumno, por Unidad de Aprendizaje: | Operaciones Matriciales         | 6          | 0             | 5          | 2             |
|  | Matriz Inversa                  | 8          | 1             | 10         | 4             |
|  | Sistemas de Ecuaciones Lineales | 6          | 2             | 12         | 2             |
|  | Espacios Vectoriales            | 10         | 1             | 8          | 1             |
|  | Transformaciones Lineales       | 6          | 1             | 4          | 1             |
| Total de horas por cuatrimestre:   | 90                              |            |               |            |               |
| Total de horas por semana:   | 6                               |            |               |            |               |
| Créditos:  | 6                               |            |               |            |               |



Bibliografía:

TÍTULO: Álgebra Lineal. Una introducción Moderna  
AUTOR: Poole David  
AÑO: 2007  
EDITORIAL O REFERENCIA: Thomson  
LUGAR Y AÑO DE LA EDICIÓN: México, 2007, Segunda Edición  
ISBN O REGISTRO: ISBN: 970-686-595-0

TÍTULO: Álgebra Lineal  
AUTOR: Grossman Stanley I  
AÑO: 2008  
EDITORIAL O REFERENCIA: Mc. Graw Hill  
LUGAR Y AÑO DE LA EDICIÓN México, 2008, Sexta Edición  
ISBN O REGISTRO: ISBN: 970-10-6517-4.

TÍTULO: Álgebra Lineal y sus Aplicaciones  
AUTOR: Lay, David C.  
AÑO: 2007  
EDITORIAL O REFERENCIA: Pearson Educación  
LUGAR Y AÑO DE LA EDICIÓN: México, 2007, Tercera Edición  
ISBN O REGISTRO: ISBN: 978-970-26-0906-3

DATOS GENERALES

NOMBRE DEL GRUPO RESPONSABLE: Academia de Ciencias Básicas

NOMBRE DE LA ASIGNATURA: Álgebra Lineal

CLAVE DE LA ASIGNATURA: ALL-CV

OBJETIVO DE LA ASIGNATURA: El alumno será capaz de analizar y resolver problemas relacionados con el álgebra matricial, sistemas de ecuaciones lineales aplicados a la ingeniería, espacios vectoriales, transformaciones lineales, valores y vectores.

TOTAL HRS. DEL CUATRIMESTRE: 90 Horas

FECHA DE EMISIÓN: 8 de junio del 2010

UNIVERSIDADES PARTICIPANTES: Universidades Politécnicas de: Huatusco, Chiapas y Querétaro

CONTENIDOS PARA LA FORMACIÓN

| UNIDADES DE APRENDIZAJE         | RESULTADOS DE APRENDIZAJE  | EVIDENCIAS   | TÉCNICAS SUGERIDAS            |   | ESPACIO EDUCATIVO |             |      | ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE |          |                             |  | TOTAL DE HORAS |               |            |               | OBSERVACIÓN |   |             |
|---------------------------------|--|--|-------------------------------|---|-------------------|-------------|------|---------------------------|----------|-----------------------------|--|----------------|---------------|------------|---------------|-------------|---|-------------|
|                                 |  |  | PARA LA ENSEÑANZA (PROFESOR)  | PARA EL APRENDIZAJE (ALUMNO)                        | AULA              | LABORATORIO | OTRO | MOVILIDAD FORMATIVA       |          | MATERIALES REQUERIDOS       | EQUIPOS REQUERIDOS                                   | TEÓRICA        |               | PRÁCTICA   |               |             | TÉCNICA   | INSTRUMENTO |
|                                 |  |  |                               |   |                   |             |      | PROYECTO                  | PRÁCTICA |                             |  | Presencial     | NO Presencial | Presencial | NO Presencial |             |   |             |
| Operaciones matriciales         | Al completar la unidad de aprendizaje el alumno será capaz de:<br>* Realizar operaciones de suma, resta, multiplicación por escalar.   | EC1: Solución de cuestionario donde identifique y clasifique arreglos matriciales.<br>EP1: Resolución de ejercicios que involucren operaciones fundamentales de matrices.  | Exposición y discusión guiada | Taller de ejercicios                                | X                 | N/A         | N/A  | N/A                       | N/A      | Material impreso            | Cañón, computadora, pintarrón, plumones              | 6              | 0             | 5          | 2             | Documental  | Cuestionario de clasificación de arreglos matriciales<br>Lista de cotejo para problemario |             |
| Matriz inversa                  | Al completar la unidad de aprendizaje el alumno será capaz de:<br>• Calcular la inversa de una matriz por los métodos de la matriz adjunta y eliminación gaussiana   | EC1: Solución de cuestionario donde identifiquen si una de matriz tiene inversa.<br>EP1: Resolución de ejercicios que involucren el cálculo de una matriz por diversos métodos.  | Exposición y discusión guiada | Taller de ejercicios y practicas mediante la acción | X                 | N/A         | N/A  | N/A                       | N/A      | Material impreso            | cañón, computadora, pintarrón, plumones              | 8              | 1             | 10         | 4             | Documental  | Cuestionario de matriz inversa<br>Lista de cotejo para problemario                        |             |
| Sistemas de ecuaciones lineales | Al completar la unidad de aprendizaje el alumno será capaz de:<br>• Plantear y resolver problemas mediante el uso de sistemas de ecuaciones lineales por diversos métodos.   | EP1: Resolución de ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales para dar respuesta a fenómenos reales de forma manual y/o utilizando software especializado.  | Exposición y Discusión Guiada | Resolución de situaciones problemáticas             | X                 | N/A         | N/A  | N/A                       | N/A      | Material impreso y software | calculadora, computadora, cañón, pintarrón, plumones | 6              | 2             | 12         | 2             | Documental  | Lista de cotejo para problemario  |             |
| Espacios vectoriales            | Al completar la unidad de aprendizaje el alumno será capaz de:<br>• Realizar operaciones entre vectores, definir y manejar las propiedades de los espacios vectoriales<br>• Efectuar cálculos reales con y/o números | EC1. Solución de un cuestionario donde identifique y resuelva operaciones con vectores en diversos espacios vectoriales.<br>EP1. Resolución de problemario con ejercicios para determinar los valores y de los espacios vectoriales propios de un arreglo matricial y dar respuesta a fenómenos reales de forma manual con y/o utilizando software especializado | Exposición                    | Taller de ejercicios                                | X                 | N/A         | N/A  | N/A                       | N/A      | Material impreso y software | calculadora, computadora, cañón, pintarrón, plumones | 10             | 1             | 8          | 1             | Documental  | Cuestionario de operaciones con vectores.<br>Lista de cotejo para problemario             |             |
| Transformaciones lineales       | Al completar la unidad de aprendizaje el alumno será capaz de:<br>• Identificar y calcular las transformaciones lineales de arreglos matriciales   | EC1. Solución de un cuestionario donde identifique el transformaciones lineales<br>EP1. Resolución de problemario con ejercicios para determinar las transformaciones lineales de arreglos matriciales   | Exposición                    | Taller de ejercicios                                | X                 | N/A         | N/A  | N/A                       | N/A      | Material impreso            | cañón, computadora, pintarrón, plumones              | 6              | 1             | 4          | 1             | Documental  | Cuestionario de transformaciones lineales<br>Lista de cotejo para problemario             |             |





# **Instrumentos de Evaluación**

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

|   |        |
|---|--------|
| NOMBRE DEL ALUMNO:  | FECHA: |
| MATERIA:  |        |
| NOMBRE DEL MAESTRO:   |        |
| <p>I Expresa algebraicamente las siguientes proposiciones:</p> <p>a) La suma de tres números consecutivos es 60</p> <p>b) El largo de un terreno de forma rectangular mide el doble de su ancho más tres metros. El perímetro es de 5010 metros.</p> <p>c) Tres números enteros consecutivos tales que la suma del primero y del tercero es igual al doble del segundo</p> <p>II ¿Qué es una ecuación y cuáles serían sus características?</p> <p>III ¿Cuáles son las características de una ecuación lineal o de primer grado? Dar un ejemplo</p> <p>IV Si se tiene una ecuación lineal o de primer orden, qué significado tiene la solución</p> <p>V ¿Cómo se representaría geoméricamente una ecuación lineal o de primer orden?</p> <p>VI Grafica en un mismo plano</p> <p>a) <math>3x+2y=6</math></p> <p>b) <math>25=x-7y</math></p> <p>c) <math>-y=-x</math></p> <p>VII ¿El punto <math>(0,-10)</math> es solución de <math>4x+25y=10</math>? Justifica tu respuesta</p> <p>VIII Resolver el siguiente problema: En una alcancía hay billetes de \$50, \$100 y \$ 200 pesos, haciendo un total de \$9600. El número de billetes de \$100 es el triple que las de \$200, y el número de billetes de \$50 es el doble de los de \$100. ¿Cuántos billetes de cada denominación hay en la alcancía?</p> |        |
| CALIFICACIÓN:   |        |

## INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN SUMATIVA



Subsistema de  
**Universidades  
Politécnicas**

### CUESTIONARIO GUÍA DE CLASIFICACIÓN DE ARREGLOS MATRICIALES

|                     |        |
|---------------------|--------|
| NOMBRE DEL ALUMNO:  | FECHA: |
| MATERIA:            |        |
| NOMBRE DEL MAESTRO: |        |

Contestar los siguientes planteamientos de forma clara y ordenada.

I Relacione la matriz y el orden correspondiente, expresado en las siguientes columnas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad ( ) \quad \text{a. Orden } 2 \times 3$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ( ) \quad \text{b. Orden } 2 \times 1$$

$$[ 3 \ 5 \ 4 \ -2 ] \quad ( ) \quad \text{c. Orden } 3 \times 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad ( ) \quad \text{d. Orden } 1 \times 4$$

II Clasifique las siguientes matrices, colocando en el espacio en blanco la respuesta correcta

- A)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & \end{bmatrix}$  Matriz \_\_\_\_\_ B)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & & 0 \\ 0 & -1 & \end{bmatrix}$  Matriz \_\_\_\_\_ C)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & \\ 0 & 1 & 5 & \\ 0 & 0 & -8 & \end{bmatrix}$  Matriz \_\_\_\_\_
- D)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & \end{bmatrix}$  Matriz \_\_\_\_\_ E)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  Matriz \_\_\_\_\_

III Obtenga  $A^T$  para cada una de las siguientes matrices.

A)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & \end{bmatrix}$

B)  $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

C)  $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 & 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

IV Si  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$  Encuentre una matriz que sea antisimétrica a A. Justifique su respuesta.

CALIFICACIÓN:

## INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN SUMATIVA



Subsistema de  
**Universidades  
Politécnicas**

### CUESTIONARIO GUÍA PARA IDENTIFICAR SI UNA MATRIZ TIENE INVERSA

|   |        |
|---|--------|
| NOMBRE DEL ALUMNO:  | FECHA: |
| MATERIA:  |        |
| NOMBRE DEL MAESTRO:   |        |
| <p>Contestar los siguientes planteamientos de forma clara.</p> <p>I Encuentre una matriz <math>A</math> tal que <math>A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}</math></p> <p>II ¿Para qué valores de <math>\lambda</math> la matriz dada no es invertible?</p> <p>a) <math>\begin{bmatrix} \lambda &amp; 1 \\ 1 &amp; \lambda \end{bmatrix}</math>    <math>\begin{bmatrix} \lambda &amp; 1 \\ 1 &amp; \lambda \end{bmatrix}</math></p> <p>b) <math>\begin{bmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 4 \\ \lambda &amp; 1 &amp; 6 \\ \lambda &amp; 3 &amp; 2 \end{bmatrix}</math></p> <p>III ¿Cuáles de las siguientes matrices no son invertibles?</p> <p>a) <math>\begin{bmatrix} \lambda &amp; 4 &amp; 7 \\ 0 &amp; 3 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{bmatrix}</math>                      b) <math>\begin{bmatrix} \lambda &amp; 4 &amp; 7 \\ 0 &amp; 0 &amp; 3 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{bmatrix}</math></p> <p>c) <math>\begin{bmatrix} \lambda &amp; \lambda &amp; 5 &amp; 2 \\ 0 &amp; 3 &amp; 1 &amp; 6 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 4 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 7 \end{bmatrix}</math>                      c) <math>\begin{bmatrix} \lambda &amp; \lambda &amp; 5 &amp; 2 \\ 0 &amp; 3 &amp; 1 &amp; 6 \\ 0 &amp; 4 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 7 \end{bmatrix}</math></p> |        |
| CALIFICACIÓN:   |        |





NOMBRE DEL ALUMNO:

FECHA:

MATERIA:

NOMBRE DEL MAESTRO:

I Sean  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (2, 1)$  y  $w = (3, 2)$ . Determine las componentes de

- $u \cdot v$
- $7v \cdot w$
- $v \cdot w$
- $3(u \cdot v)$
- $v \cdot w$
- $2v \cdot (u \cdot v)$

II Demuestre que no existen escalares  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  tales que  $c_1(1, 2, 3) + c_2(5, 7, 1) + c_3(6, 9, 4) = (4, 5, 0)$

III Sean  $u = (1, 2, 3)$ ,  $v = (2, 1)$  y  $w = (3, 2)$ . Determine las componentes de

- $\|u \cdot v\|$
- $\|u\| \|v\|$
- $\|u\| \|u\|$
- $\|3u \cdot v \cdot v\|$
- $\frac{1}{\|w\|} w$
- $\left\| \frac{1}{\|w\|} w \right\|$
- $u \cdot (7v \cdot w)$
- $\|(u \cdot w)w\|$
- $\|u\|(v \cdot w)$

j)  $\|u\| \|v\| \|w\|$

IV Utilice vectores para encontrar los ángulos interiores del triángulo con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 4)$  y determine su área

V Sean los vectores  $a = (5, 8)$ ,  $b = (2, 1)$  y  $c = (-7, 0)$

a) Calcular  $2a + b + c = (1, 1)$

b) Trazar  $2a$

VI Sean  $u = (1, 2)$ ,  $v = (4, 5)$ ,  $w = (3, 0)$  y  $d = (1, 3)$

a) Encuentre la longitud de los vectores  $u$  y  $w$

b) Determine  $v \cdot u$  y  $v \cdot d$

c) Encuentre el vector unitario en la misma dirección que el vector  $v$

d) Encontrar el ángulo formado entre los vectores  $v$  y  $w$

e) Encontrar la proyección ortogonal de  $u$  sobre  $w$

f) Calcular  $\|v\| \|d\| \cos \theta$  y  $\|v\| \|u\| \cos \theta$

VII Dado el vector encuentre:

a) Un vector en la misma dirección y tres veces su longitud

b) Un vector con dirección opuesta y un tercio de su longitud

VIII Encuentre los cosenos directores del segmento PQ donde  $P=(7, -2, 4)$  y  $Q=(3, 2, 1)$

IX Determine dos vectores de norma 1 ortogonales a  $(3, 1, 2)$

CALIFICACIÓN:



NOMBRE DEL ALUMNO:

FECHA:

MATERIA:

NOMBRE DEL MAESTRO:

I Decir si es falso o verdadera la siguiente expresión

- a) Si  $T$  es una transformación lineal, entonces  $T(3x) = 3T(x)$
- b) Si  $T$  es una transformación lineal, entonces  $T(x+y) = T(x) + T(y)$
- c) Si  $T$  es una transformación lineal, entonces  $T(xy) = T(x)T(y)$
- d) Si  $A$  es una matriz de  $4 \times 5$ , entonces  $T_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$  es una transformación lineal de  $\mathbb{R}^4$  en  $\mathbb{R}^5$
- e) Si  $A$  es una matriz de  $4 \times 5$ , entonces  $T_A: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  es una transformación lineal de  $\mathbb{R}^5$  en  $\mathbb{R}^4$

II Determine si la siguiente transformación es o no lineal

- a)  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $T(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 + y \end{pmatrix}$
- b)  $P_1$ ;  $(Tp)(x) = x^2 p(x) + xp(x) + p(x)$

III ¿Es  $T: P_2 \rightarrow P_2$ ;  $T(a + bx + cx^2) = (a + b) + (b + c)x + cx^2$  una transformación lineal?

IV De los siguientes enunciados, indique si son verdaderos o falsos.

- a) Si  $T$  es una transformación lineal de  $V$  en  $W$ , entonces la imagen de  $T$  es  $W$
- b) Si  $T: V \rightarrow W$  es una transformación lineal y  $T(0_V) = 0_W$ , entonces  $T$  es la transformación 0.

V Si T;

es la transformación lineal  $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x+y+z \end{pmatrix}$  entonces  $A_T$

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

VI \_\_\_\_representa(n) una expansión a lo largo del eje y

- a)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

VII \_\_\_\_representa(n) una expansión a lo largo del eje x

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$     c)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$     e)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$     f)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

CALIFICACIÓN:

## LISTA DE COTEJO PARA PROBLEMARIO

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE \_\_\_\_\_

### DATOS GENERALES DEL PROCESO DE EVALUACIÓN

|   |                        |
|---|------------------------|
| NOMBRE DEL ALUMNO:  | MATRICULA:             |
| PRODUCTO: UNIDAD 1: EP1, UNIDAD 2: EP1, EP2, UNIDAD 3: EP1,<br>UNIDAD 4:EP1, EP2, UNIDAD 5: EP1 | FECHA:                 |
| ASIGNATURA: ÁLGEBRA LINEAL  | PERIODO CUATRIMESTRAL: |
| NOMBRE DEL DOCENTE:   | FIRMA DEL DOCENTE:     |

### INSTRUCCIONES

Revisar las actividades que se solicitan y marque en los apartados "SI" cuando la evidencia se cumple; en caso contrario marque "NO". En la columna "OBSERVACIONES" indicaciones que puedan ayudar al alumno a saber cuáles son las condiciones no cumplidas, si fuese necesario.

| Valor del reactivo | Característica a cumplir (Reactivo)  | CUMPLE |    | OBSERVACIONES |
|--------------------|--|--------|----|---------------|
|                    |  | SI     | NO |               |
| 10%                | <b>Presentación:</b><br>El trabajo entregado cumple con los requisitos de: <ul style="list-style-type: none"> <li>■ buena presentación, orden y limpieza</li> <li>■ portada. (Nombre de la escuela o logotipo, Carrera, Asignatura, Nombre del Docente, Nombre (s) de alumno (s), Grupo, Lugar y Fecha de entrega).</li> </ul>   |        |    |               |
| 50%                | <b>Resolución del problema</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Seleccionar los datos apropiados para resolver el problema</li> <li>■ Conocer hechos y propiedades matemáticas</li> <li>■ Seleccionar y evaluar estrategias adecuadas para resolver el problema</li> <li>■ Simbolizar en términos matemáticos</li> <li>■ Manipular de forma estandarizada cálculos, expresiones simbólicas y fórmulas</li> </ul> |        |    |               |
| 30%                | <b>Expresión del resultado</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Representar el contenido matemático en forma verbal y/o gráfico</li> <li>■ Expresar correctamente los resultados obtenidos al resolver problemas</li> </ul>  |        |    |               |
| 10%                | <b>Responsabilidad:</b><br>Entregó el reporte en la fecha y hora señalada  |        |    |               |
| 100%               | <b>CALIFICACIÓN:</b>   |        |    |               |

## GLOSARIO

- **Adjunta.** La matriz  $\text{adj}(A)$  formada a partir de una matriz cuadrada  $A$  reemplazando la entrada  $(i,j)$  de  $A$  por el cofactor  $(i,j)$ , para todas las  $i$  y  $j$ , y transponiendo después la matriz resultante.
- **Algoritmo por reducción por filas.** Método sistemático que utiliza operaciones elementales de fila y que reduce una matriz a la forma escalonada o a la forma escalonada reducida.
- **Base.** Para un subespacio no trivial  $H$  de un espacio vectorial, es el conjunto indizado  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  en  $V$  tal que: (i) es un conjunto linealmente independiente y (ii) el subespacio generado por coincide con  $H$ .
- **Base canónica.** La base  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  para que consiste en las columnas de la matriz identidad  $n \times n$  o la base  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  para  $\mathbb{R}^n$ .
- **Base de vectores propios.** Una base que consiste enteramente en los vectores propios de una matriz dada.
- **Base ortogonal.** Una base que también es un conjunto ortogonal.
- **Base ortonormal.** Una base que es un conjunto ortogonal de vectores.
- **Cambio de base.** Vea coordenadas de  $x$  relativas a la base  $B$ .
- **Codominio.** Para una transformación lineal  $T: V \rightarrow W$  es el conjunto  $\text{Ran}(T)$  que contiene al rango de  $T$ . En general, si  $T$  es una función de un espacio vectorial  $V$  en un espacio vectorial  $W$ , entonces  $W$  se llama el codominio de  $T$ .
- **Cofactor.** Un número  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$  llamado cofactor  $(i,j)$  de  $A$ , donde  $A_{ij}$  es la submatriz formada al eliminar la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de  $A$ .
- **Columna pivote.** Una columna que contiene una posición pivote.
- **Combinación lineal.** Una suma de múltiplos escalares de vectores. Los escalares con llamados pesos.
- **Conjunto fundamental de soluciones.** Una base para el conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal homogénea diferencial o en diferencias.

- Conjunto generado por  $v_1, \dots, v_p$ . El conjunto  $\text{Gen } v_1, \dots, v_p$
- Conjunto generador. Para un subespacio vectorial  $H$ , cualquier conjunto  $v_1, \dots, v_p$  en  $H$  tal que  $H = \text{Gen } v_1, \dots, v_p$
- Conjunto ortogonal. Un conjunto  $S$  de vectores tal que  $u \cdot v = 0$  para todo  $u, v$  distinto en  $S$ .
- Conjunto ortonormal. Conjunto ortogonal de vectores unitarios
- Conjunto solución. Conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema lineal.
- Dimensión finita. Un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores.
- Dimensión infinita. Un espacio vectorial  $V$  diferente de cero que no tiene base finita.
- Desarrollo por cofactores. Fórmula para determinar  $\det A$  que utiliza los cofactores asociados a una fila o una columna, por ejemplo para la fila 1:  $\det A = a_{11}C_{11} + \dots + a_{1n}C_{1n}$ .
- Desarrollo por columna-fila. La expresión de un producto  $AB$  como una suma de productos externos:  $\text{col}_1(A) \text{fil}_1(B) + \dots + \text{col}_n(A) \text{fil}_n(B)$ , donde  $n$  es el número de columnas de  $A$ .
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz.  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$  para todos  $u, v$ .
- Determinante. El número  $\det A$  definido inductivamente por un desarrollo por cofactores a lo largo de la primera fila de  $A$ .
- Diagonal en bloque. Matriz partida de  $A = (A_{ij})$  tal que cada bloque  $A_{ij}$  es una matriz cero para  $i \neq j$ .
- Diagonal principal. Las entradas de una matriz con índices de fila y columna iguales.
- Diagonalizable. Matriz que se puede escribir de forma factorizada como  $PDP^{-1}$ , donde  $D$  es una matriz diagonal y  $P$  una matriz invertible.
- Diagonalizable ortogonalmente. Una matriz  $A$  que admite una factorización  $A = PDP^{-1}$ , siendo  $P$  una matriz ortogonal ( $P^{-1} = P^T$ ) y  $D$  diagonal.
- Dimensión. De un espacio vectorial  $V$  es el número de vectores de una base de  $V$ ; se escribe  $\dim V$ . La dimensión del espacio cero es 0.
- Dominio. De una transformación  $T$ , es el conjunto de todos los vectores  $x$  por los cuales  $T(x)$  está definida.

- Ecuación homogénea. Una ecuación de la forma  $Ax = 0$ , posiblemente escrita como una ecuación vectorial o como un sistema de ecuaciones lineales.
- Ecuación lineal. Ecuación que puede escribirse de la forma  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , donde  $b$  y los coeficientes  $a_1, \dots, a_n$  son números reales o complejos.
- Ecuación matricial. Ecuación en la que interviene por lo menos una matriz; por ejemplo,  $Ax = b$
- Ecuación no homogénea. Ecuación de la forma  $Ax=b$  con  $b \neq 0$  escrita posiblemente como una ecuación vectorial o como un sistema de ecuaciones lineales.
- Ecuación vectorial. Ecuación en la que interviene una combinación lineal de vectores con pesos no determinados.
- Escalar. Número (real) empleado para multiplicar un vector o una matriz.
- Espacio propio. El conjunto de todas las soluciones de  $AX=\lambda X$  donde  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ . Consiste en los valores cero y todos los vectores propios correspondientes a  $\lambda$
- Espacio vectorial. Conjunto de elementos, llamados vectores, en el cual están definidas dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por escalares.
- Función. Vea transformación.
- Gen  $v_1, \dots, v_p$ . El conjunto de todas las combinaciones lineales de  $v_1, \dots, v_p$ . También, es subespacio generado por  $v_1, \dots, v_p$
- Imagen. De un vector  $x$  bajo una transformación  $T$ , el vector  $T(x)$  que  $T$  asigna a  $x$ .
- Inyectiva. Función  $T: V \rightarrow W$  tal que cada  $b$  en  $W$  es la imagen de a lo mas una  $x$  en  $V$
- Inversa. De una matriz de  $n \times n$ , a una matriz  $A^{-1}$   $n \times n$  tal que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ .
- Isomorfismo. Función lineal inyectiva de un espacio vectorial sobre otro.
- Linealmente dependientes. Conjunto indizado  $v_1, \dots, v_p$  con la propiedad de que existen constantes  $c_1, \dots, c_p$  no todos ceros tales que  $c_1v_1 + \dots + c_pv_p = 0$ . Esto es, la ecuación vectorial  $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p = 0$  tiene una solución no trivial.



- Linealmente independientes. Conjunto indizado  $v_1, \dots, v_p$  con la condición de que la ecuación vectorial  $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_pv_p = 0$  tiene únicamente la solución trivial  $c_1 = \dots = c_p = 0$
- Mapeo. Vea transformación.
- Matriz. Un arreglo rectangular de números
- Matriz aumentada. Matriz constituida por una matriz de coeficientes para un sistema lineal y una o más columnas a la derecha. Cada columna extra contiene las constantes del lado derecho.
- Matriz canónica. Para una transformación lineal T, la matriz A tal que  $T(x) = AX$  para toda X en el dominio de T.
- Matriz de coeficientes. Matriz cuyas entradas son los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales.
- Matriz diagonal. Matriz cuadrada cuyas entradas que no están sobre la diagonal principal son todas cero.
- Matriz escalonada. Matriz rectangular que tiene tres propiedades: (1) Toda fila diferente de cero está arriba de cualquier fila de ceros. (2) Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila de arriba. (3) Todas las entradas debajo de la entrada en una columna son cero.
- Matriz escalonada reducida. Matriz rectangular en forma escalonada que tiene estas propiedades adicionales; la entrada principal de cada fila diferente de cero es 1 y cada 1 principal es la única entrada diferente de cero en su columna.
- Matriz identidad. Una matriz cuadrada con unos sobre la diagonal y ceros sobre las demás entradas.
- Matriz invertible. Matriz cuadrada que tiene un inverso.
- Matriz m x n. Una matriz con m filas y n columnas.
- Matriz ortogonal. Matriz U invertible cuadrada tal que  $U^{-1} = U^T$ .
- Matriz simétrica. Matriz A tal que  $A^T = A$ .
- Matriz triangular inferior. Matriz con ceros arriba de la diagonal principal.
- Matriz triangular superior. Matriz U con ceros debajo de las entradas diagonales  $u_{11}, u_{22}, \dots$

- Múltiplo escalar. El vector  $cu$  obtenido al multiplicar cada entrada de  $u$  por  $c$ .
- No singular. Una matriz invertible.
- Norma de un vector. El escalar  $\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{(v, v)}$
- Núcleo. El conjunto de los  $x$  en  $V$  tales que  $T(x) = 0$ .
- Operaciones elementales de fila. (1) (Reemplazo) Reemplazo de una fila por la suma de sí misma y un múltiplo de otra fila. (2) Intercambio de dos filas. (3) (Escalamiento) Multiplicación de todas las entradas de una fila por una constante diferente de cero.
- Origen. El vector cero.
- Pesos. Los escalares usados en una combinación lineal.
- Pivote. Número diferente de cero que se usa ya sea en una posición pivote para crear ceros mediante operaciones por fila o se convierte en un 1 principal, que a su vez se usa para crear ceros.
- Polinomio característico.  $\det(A - \lambda I)$ , en algunos textos,  $\det(\lambda I - A)$
- Posición pivote. Posición de una matriz  $A$  que corresponde a una entrada principal en una forma escalonada de  $A$ .
- Producto  $Ax$ . La combinación lineal de las columnas  $A$  usando las entradas correspondientes de  $x$  como pesos.
- Producto interior. El escalar  $u^T v$ , generalmente escrito como  $u \cdot v$ , donde  $u$  y  $v$  son vectores en  $\mathbb{R}^n$  vistos como matrices  $n \times 1$ . También se le llama producto punto de  $u$  y  $v$ . En general, una función en un espacio vectorial que asigna a cada par de vectores  $u$  y  $v$  un número  $\langle u, v \rangle$  sujeto a ciertos axiomas.
- Rango de una matriz. La dimensión del espacio de columna de  $A$ , denotado por  $\text{rango } A$ .
- Rango de una transformación. El conjunto de todos los vectores de la forma  $T(x)$  para alguna  $x$  en el dominio de  $T$ .
- Reemplazo de filas. Operación elemental de filas que reemplaza una fila de una matriz por la suma de la fila y un múltiplo de otra fila.

- Regla de Cramer. Fórmula para entrada de la solución  $x$  de la ecuación  $Ax = b$  cuando  $A$  es una matriz invertible.
- Relación de dependencia lineal. Ecuación vectorial homogénea en la que todos los pesos están especificados y por lo menos un peso es diferente de cero.
- Resta vectorial. Calcular  $u - v$  y escribir el resultado como  $u - v$ .
- Singular. Matriz que no tiene inverso.
- Sistema de ecuaciones lineales. Colección de una o más ecuaciones lineales en las que interviene el mismo conjunto de variables, digamos  $x_1, \dots, x_n$ .
- Sistema lineal consistente. Sistema lineal con por lo menos una solución.
- Sistema lineal inconsistente. Sistema lineal sin solución.
- Sistema lineal. Colección de una o más ecuaciones lineales en las que intervienen las mismas variables, digamos  $x_1, \dots, x_n$ .
- Sistema sobredeterminado. Sistema de ecuaciones con más ecuaciones que incógnitas.
- Sistemas equivalentes. Sistemas lineales con el mismo conjunto solución.
- Solución (de un sistema lineal). Lista  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de números que convierten cada ecuación del sistema en un enunciado verdadero cuando se sustituyen los valores  $s_1, \dots, s_n$  por  $x_1, \dots, x_n$ .
- Solución no trivial. Solución diferente de cero de una ecuación homogénea o de un sistema de ecuaciones homogéneas.
- Solución trivial. La solución  $X = 0$  de una ecuación homogénea  $Ax = 0$ .
- Subespacio cero. El subespacio que consiste únicamente en el vector cero.
- Subespacio propio. Cualquier subespacio de un espacio vectorial  $V$  distinto de  $V$  mismo.
- Submatriz. Cualquier matriz obtenida al eliminar algunas filas y/o columnas de  $A$ ; también  $A$  misma.
- Suma de columnas. La suma de las entradas en una fila de una matriz.
- Suma de filas. La suma de las entradas en una fila de una matriz.

- Suma vectorial. Sumar vectores sumando las entradas correspondientes.
- Sustitución regresiva. La fase regresiva de la reducción por filas de una matriz aumentada que transforma una matriz escalonada en una matriz escalonada reducida; sirve para encontrar la(s) solución(es) de un sistema de ecuaciones lineales.
- Tamaño (de una matriz). Dos números, escritos en la forma  $m \times n$ , que especifican el número de filas ( $m$ ) y de columnas ( $n$ ) de la matriz.
- Transformación(o función o mapeo). Regla que a cada vector  $x$  en  $V$  asigna un único vector  $T(x)$  en  $W$ .
- Transformación de semejanza. Una transformación de una matriz,  $A \mapsto P^{-1}AP$ .
- Transformación lineal. Regla  $T$  que a cada vector  $x$  en  $V$  le asigna un único vector  $T(x)$  en  $W$ , tal que (i)  $T(u + v) = T(u) + T(v)$  para todos  $u, v$  en  $V$  y (ii)  $T(cu) = cT(u)$  para todo  $u$  en  $V$  y todo escalar  $c$ . Notación:  $T: V \mapsto W$ ; también,  $x \mapsto Ax$ , cuando  $T: V \mapsto W$  y  $A$  es la matriz estándar para  $T$ .
- Transformación matricial. Transformación o mapeo  $x \mapsto Ax$ , donde  $A$  es una matriz  $m \times n$  y  $x$  representa cualquier vector en  $V$ .
- Valor propio (de  $A$ ). Escalar  $\lambda$  tal que la ecuación  $Ax = \lambda x$  tiene una solución para algún vector  $x$  diferente de cero.
- Valor propio complejo. Raíz no real de la ecuación característica de una matriz  $n \times n$ .
- Vector. Una lista de números; una matriz con sólo una columna. En general, cualquier elemento de un espacio vectorial.
- Vector cero. El vector único, denotado por  $0$ , tal que  $u + 0 = u$  para todo  $u$ . En  $V$ ,  $0$  es el vector cuyas entradas son todas cero.
- Vector columna. Una matriz con sólo una columna o una única columna de una matriz que tiene varias columnas.
- Vector propio. Vector  $x$  diferente de cero tal que  $Ax = \lambda x$  para algún escalar  $\lambda$ .
- Vector propio complejo. Vector diferente de cero  $x$  en  $\mathbb{C}^n$  tal que  $Ax = \lambda x$ .
- Vector fila. Una matriz con solamente una fila o una única fila de una matriz que tiene varias filas.

■ Vector unitario. Vector  $v$  tal que  $\|v\|$  ■.

■ Vectores iguales. Vectores en ■ cuyas entradas correspondientes son las mismas.



## BIBLIOGRAFÍA

### Básica

Algebra Lineal. Una Introducción Moderna, Poole David, Segunda Edición, Thomson, México, 2007

Algebra Lineal, Grossman Stanley I., Sexta Edición, Mc. Graw Hill, México, 2008

Algebra Lineal y sus Aplicaciones, Lay David C, Tercera Edición, Pearson Educación, México 2007